חדו"א 2 - רשימת הוכחות מתוך חוברת מבחנים.

אינדקס הוכחה

1) הוכח כי פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ אינטגרבילית.

2) יהיו $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות כך ש: f מונוטונית, $0\le g$ ואינטגרבילית.
הוכח כי קיימת $\xi\in[a,b]$ כך ש: $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx + f(b)\int_{\xi}^b g(x)dx$

3) תהי (f_n) סדרת פונקציות אינטגרביליות על $[a,b]$ המתכנסת במ"ש על הקטע לפונקציה f. הוכח כי f אינטגרבילית (וקיים $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$)

4) יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $0<R$. הוכח: אם הטור מתכנס בנקודה $x=R$, אזי הטור מתכנס במ"ש על $[0,R]$.

5) תהי (f_n) סדרת פונקציות גזירות על $[a,b]$. נניח כי קיימת $x_0\in[a,b]$ כך ש-$(f_n(x_0))$ סדרה מתכנסת, וכמו כן (f'_n) מתכנסת במ"ש על $[a,b]$. הוכח כי הסדרה (f_n) מתכנסת במ"ש על $[a,b]$, וכי הפונקציה הגבולית f גזירה על $[a,b]$ ומתקיים $f'=\lim_{n\to\infty}(f'_n)$.

6) הגדר: הפונקציה f אינטגרבילית על $[a,b]$. ציין תנאי הכרחי ומספיק לאינטגרביליות של הפונקציה f על $[a,b]$ והוכח את אחד הכיוונים. הראה שאם f מונוטונית על $[a,b]$ אזי היא אינטגרבילית שם.

7) משפט דיני: יהי $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ טור פונקציות רציפות ואי-שליליות בקטע $[a,b]$. אם הטור מתכנס וסכומו $S(x)$ הוא פונקציה רציפה אזי הטור מתכנס במ"ש.

8) תהי $f(x,y):A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, ו-$(a,b)\in A^0$. נניח כי קיימת סביבה V של (a,b) בה קיימות הנגזרות מסדר שני f_{xy}, f_{yx} והן רציפות בנקודה (a,b). הוכח כי $f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$

9) תהי (f_n) סדרת פונקציות המתכנסת במידה שווה על A לפונקציה f. תהי x_0 נקודת הצטברות של A, סופית או לא. נניח כי לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $a_n=\lim_{x\to x_0}f_n(x)$ ו- $a_n\in\mathbb{R}$. הוכח כי הסדרה (a_n) מתכנסת, לפונקציה f יש גבול ב-x_0 וקיים
$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{n\to\infty}a_n$

10) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה. הוכח ש-f אינטגרבילית על $[a,b]$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה δ של $[a,b]$ עבורה $S(f,\delta)-s(f,\delta)<\varepsilon$

1) הוכח כי פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ אינטגרבילית בו לפי רימן:

א) לפי משפט ווירשטראס פונקציה רציפה בקטע סגור חסומה בו.

ב) לפי משפט קנטור פונקציה רציפה בקטע סגור רציפה בו במידה שווה.
כלומר לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $z,y\in[a,b]$ המקיימים $|z-y|<\delta$
מתקיים $|f(z)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.

ג) תהי T חלוקה של $[a,b]$ כך ש- $\lambda(T)<\delta$. לכל $z_i,y_i\in\Delta x_i$ מתקיים:

$$|f(z_i)-f(y_i)|<\frac{\varepsilon}{b-a} \Longleftarrow |z_i-y_i|\le\Delta x_i\le\lambda(T)<\delta$$

ד) יהיו z_i נקודת המקסימום של $f(x)$ בקטע Δx_i, y_i נקודת המינימום של $f(x)$ בקטע Δx_i.

$$\text{ה)}\quad \omega_i=f(z_i)-f(y_i)<\frac{\varepsilon}{b-a}\Longrightarrow\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon$$

כלומר: $\circledast\ \lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$

לפי משפט דרבו, פונקציה f חסומה בקטע $[a,b]$ ומקיימת $\circledast$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ לפי רימן.

מש"ל.

---

2) תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות כך ש- f מונוטונית, $g\ge0$ אינטגרבילית.
הוכח כי קיימת ξ כך ש- $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^\xi g(x)dx+f(b)\int_\xi^b g(x)dx$.

<u>למה</u>: אם $f(t)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אזי הפונקציה $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ רציפה ב-$[a,b]$.

תהי $a\le x\le b$. $\Delta y=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt$

יהי M חסם של $f(t)$ בקטע $[a,b]$. אזי: $|\Delta y|=\left|\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt\right|\le M\cdot|\Delta x|$

לכן כאשר $\Delta x\to0$ גם $\Delta y\to0$, כלומר $F(x)$ רציפה. $\boxtimes$ למה.

א) נתבונן בפונקציה: $F(t)=(f(b)-f(a))\cdot\int_a^t g(x)dx$. לפי הלמה היא
פונקציה רציפה ב-$[a,b]$.

ב) לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $0\le f(b)-f(x)\le f(b)-f(a)$, ולכן:

$$F(a)=0\le\int_a^b[f(b)-f(x)]g(x)dx\le\int_a^b[f(b)-f(a)]g(x)dx=[f(b)-f(a)]\int_a^b g(x)dx=F(b)$$

ג) הואיל ו- $F(x)$ היא פונקציה רציפה קיימת נקודה $\xi\in[a,b]$ כך ש-

$$F(\xi)=\int_a^b[f(b)-f(a)]g(x)dx$$

$$\text{3)}\quad \underbrace{[f(b)-f(a)]\int_a^\xi g(x)dx}_{F(\xi)}=f(b)\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx$$

(2)

ה) $$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\left[\int_a^b g(x)dx - \int_a^\xi g(x)dx\right]$$

$$f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx$$

משל.

---

3) תהא (f_n) סדרת פונקציות אינטגרביליות ב-$[a,b]$ המתכנסת במ"ש ב חומלה ל-f.
הוכח כי f אינטגרבילית וקיים $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

א) ראשית נוכיח כי f אינטגרבילית ב-$[a,b]$. יהי $\varepsilon>0$. מהנתון של התכנסות במ"ש נובע כי קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ ולכל $x\in[a,b]$ מתקיים $|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$.

ב) ניקח $n>N$ כלשהו. אז מתקיים לכל $x\in[a,b]$: $f_n(x)-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}<f(x)<f_n(x)+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

ג) יהי $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ כלשהו. $\sup_{[\alpha,\beta]} f(x)\le\sup_{[\alpha,\beta]} f_n(x)+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

$$\inf_{[\alpha,\beta]} f(x)\ge\inf_{[\alpha,\beta]} f_n(x)-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

ולכן לכל $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$. בפרט, f חסומה בקטע $[a,b]$.

ד) מהאינטגרביליות של f_n נובע כי קיים $\delta>0$ כך שלחלוקה P של $[a,b]$ המקיימת $\lambda_P<\delta$ מתקיים: $\sum_{i=1}^n \omega_i(f_n)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$. מסעיף ג' מתקיים: $\omega_i(f)\le\omega_i(f_n)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

ה) $$\sum_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^n\left[\omega_i(f_n)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right]\Delta x_i=\sum_{i=1}^n \omega_i(f_n)\Delta x_i+\underbrace{\sum_{i=1}^n\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Delta x_i}_{=\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

כלומר לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה P של $[a,b]$ המקיימת $\lambda_P<\delta$ מתקיים: $\sum_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i\le\varepsilon$.

משפט דרבו לאינטגרביליות, מסעיף ג' + ה' קובעים כי f אינטגרבילית.

ו) כעת נראה כי $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$. יהי $\varepsilon>0$. מהנתון לגבי התכנסות במ"ש
נובע כי קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ ולכל x בקטע מתקיים:

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f_n(x)dx\right|=\left|\int_a^b[f(x)-f_n(x)]dx\right|\le\int_a^b|f(x)-f_n(x)|dx$$

$$\le\int_a^b\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)dx=\varepsilon$$

לכן לפי הגדרת הגבול מתקיים: $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$. משל.

4) יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R חיובי. הוכח: אם הטור
מתכנס בנקודה $x=R$, אזי הוא מתכנס במידה שווה על התחום $[0,R]$.

א) יהי $\varepsilon>0$ אזי קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n<m$ מתקיים $\left|\sum_{i=n}^{m} a_i R^i\right|<\varepsilon$
היות והטור מתכנס בנקודה $x=R$.

ב) יהי $x\in[0,R]$ כלשהו. אזי הביטוי $0\le\frac{x}{R}\le 1$.

ג) הסדרה $a_n=\left(\frac{x}{R}\right)^n$ היא מונוטונית וחסומה, היות ו-ב'.

ד) נרשום את השוויון: $\left|\sum_{i=n}^{m} a_i x^i\right| = \left|\sum_{i=n}^{m} a_i R^i\cdot\left(\frac{x}{R}\right)^i\right|$

לפי קריטריון אבל להתכנסות במ"ש של טורים, הקובע שטור של מכפלה $\sum a_n(x)b_n(x)$
מתכנס במ"ש אם $\sum a_n(x)$ מתכנס במ"ש ו- $(b_n(x))$ מונוטונית וחסומה,
הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס במ"ש על $[0,R]$. (מש"ל).

---

5) תהי (f_n) סדרת פונקציות גזירות על $[a,b]$. נניח כי קיימת $x_0\in[a,b]$ כך ש-
$(f_n(x_0))$ סדרה מתכנסת, וכמו כן (f'_n) סדרה מתכנסת במידה שווה על $[a,b]$.
הוכח כי הסדרה (f_n) מתכנסת במ"ש על $[a,b]$, וכי פונקציית הגבול f גזירה
על $[a,b]$ ומתקיים $\lim_{n\to\infty} f'_n = f'$.

א) $(f_n(x_0))$ מתכנסת. לפי קריטריון קושי להתכנסות סדרות, לכל $\varepsilon>0$ קיים N_1,
כך שלכל $n,m>N_1$ מתקיים $|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

ב) f'_n מתכנסת במידה שווה על $[a,b]$, לכל $x\in[a,b]$ מתקיים לפי קריטריון קושי:
לכל $\varepsilon>0$ קיים $N_2\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n,m>N_2$ $|f'_n(x)-f'_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

ג) $$|f_n(x)-f_m(x)| = |f_n(x)-f_m(x)-f_n(x_0)+f_m(x_0)-f_m(x_0)+f_n(x_0)|$$
$$\le |f_n(x)-f_m(x)-(f_n(x_0)-f_m(x_0))| + |f_n(x_0)-f_m(x_0)|$$

ד) היות ו- f_n, f_m פונקציות גזירות, בפרט (f_n-f_m) גזירה, בפרט $[a,b]$ ובפרט
בתחום $[x,x_0]$ (הנחה כי $x_0<x$, הן להפך במידה דומה ללא הגבלת הכלליות).
מכאן שמתקיימים התנאים למשפט לגראנז'. מכאן שקיימת נקודה $c\in[a,b]$
כך ש: $(f'_n(c)-f'_m(c))(x-x_0) = [(f_n(x)-f_m(x))-(f_n(x_0)-f_m(x_0))]$.

ה) נבחר $N=\max\{N_1,N_2\}$. עבור $N<n,m$ נקבל:
$$|f_n(x)-f_m(x)| \le \left|\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x-x_0)\right| + \frac{\varepsilon}{2} \underset{\uparrow}{\le} \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
$|x-x_0|\le|b-a|$ ולכן (f_n) מתכנסת במ"ש לפי קושי על $[a,b]$

ו) (f'_n) מתכנסת במידה שווה. נגדיר את פונקציית הגבול שלה כך: $h(x)=\lim_{n\to\infty} f'_n(x)$.

ז) כמו כן, (f'_n) אינטגרביליות ולפי משפט אינטגרביליות איבר-איבר מקיימת כי $h(x)$ היא אינטגרבילית. מהתכנסות f'_n במידה שווה על $[a,b]$ מתקיים השוויון:

$$\int_a^x h(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^x f'_n(x)dx$$

ח) f_n מתכנסת ב-$[a,b]$ ומכאן קיים השוויון:

$$\int_a^x h(x)dx = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \lim_{n\to\infty}\int_a^x f'_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(f_n(x)-f_n(a)\right) =$$

$$= f(x)-f(a)$$

ט. (f_n) סדרת פונקציות רציפות (היותן גזירות). (f_n) מתכנסת במידה שווה, ולפיכך פונקציית הגבול f רציפה. היות ו-f ו-h רציפות, $f(x)$ מהווה את הפונקציה הקדומה של $h(x)$, ומתקיים: $f(x)=f(a)+\int_a^x h(x)dx$, תודות ל-ח'.

י) נגזור את שני צדי השוויון ונקבל:

$$f'(x)=0+h(x) \Longrightarrow f'(x)=\lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

שו"ל.

---

6) הגדר: הפונקציה f אינטגרבילית על $[a,b]$. ציין תנאי הכרחי ומספיק לאינטגרביליות של הפונקציה f על $[a,b]$ והוכח את אחד הכיוונים. הראה שאם f מונוטונית על $[a,b]$ אזי היא אינטגרבילית שם.

א) ראשית נגדיר אינטגרביליות: פונקציה f אינטגרבילית (לפי רימן) על $[a,b]$ אם קיים הגבול I כך ש: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל חלוקה T של $[a,b]$ שפרמטר החלוקה $\lambda T<\delta$, ולכל $c_i\in\Delta x_i$ מתקיים $\left|I-\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i\right|<\varepsilon$. ללא תלות ב-$T$ וב-c_i ספציפיים.

ב) תנאי הכרחי ומספיק לאינטגרביליות: הפונקציה f אינטגרבילית ב-$[a,b]$ אם ורק אם f חסומה בקטע $[a,b]$ ומתקיים $\overline{I}=\underline{I}$, כאשר $\underline{I}=\sup\underline{S}(T)$, $\overline{I}=\inf\overline{S}(T)$.

ג) נוכיח כי התנאי לפיו f אינטגרבילית אז f חסומה ב-$[a,b]$ הוא הכרחי.

נניח כי f אינה חסומה ב-$[a,b]$. תהי T חלוקה של $[a,b]$, ויהי λ פרמטר החלוקה. קיים לפחות Δx_k אחד בו f אינה חסומה ($1\le k\le n$). אם קטע Δx_i ($i\neq k$) נבחר נקודה $c_i\in\Delta x_i$. נגדיר את הסכום A כך: $A=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} f(c_i)\Delta x_i$.

3) בקטע Δx_k נבחר את c_k כך ש- $|f(c_k)\Delta x_k|>|A|+\frac{1}{\lambda}$. הדבר ניתן כי $f(x)$ לא חסומה בקטע Δx_k. נגדיר את סכום רימן השלם: $B=A+f(c_k)\Delta x_k$.

$$|B|\ge|f(c_k)\Delta x_k|-|A|>|A|+\frac{1}{\lambda}-|A|=\frac{1}{\lambda}$$

מכיוון שכאשר λ שואפת ל-0 $|B|$ שואף ל-∞, ולכן סכומי רימן לא שואפים לגבול סופי ו-f אינה אינטגרבילית. הערה: הוכחת הכיוון השני במשפט 10.

ה) נראה כי אם f מונוטונית ב-$[a,b]$ היא אינטגרבילית. נניח בלי הגבלת הכלליות כי f אינה יורדת, כלומר לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(a)\le f(x)\le f(b)$.
מכאן ש-$f(x)$ חסומה. יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. תהי T חלוקה של $[a,b]$ כך ש- $\lambda T<\delta$. היות והפונקציה אינה יורדת, $\omega_i=f(x_i)-f(x_{i-1})$.
לכן:
$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)=$$
$$=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\left(f(b)-f(a)\right)=\varepsilon$$

ולפי משפט רימן, f אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

---

7) **משפט דיני: יהי $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ טור פונקציות רציפות אי-שליליות בקטע $[a,b]$. אם הטור מתכנס וסכומו $S(x)$ הוא פונקציה רציפה, אזי הטור מתכנס במ"ש.**

א) נסמן $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}U_k(x)$. הפונקציה $S_n(x)$ רציפה כסכום סופי של פונקציות רציפות. כמו כן הסדרה $(S_n(x))$ מונוטונית עולה כי $U_n(x)$ פונקציות חיוביות לכל x.

ב) נסמן את הפונקציה $R_n(x)$ כך: $R_n(x)=|S_n(x)-S(x)|$. כהפרש של פונקציות רציפות $R_n(x)$ רציפה גם כן. ממונוטוניות הסדרה $(S_n(x))$ מתקיים כי הסדרה $(R_n(x))$ מונוטונית יורדת ל-0 עבור כל x. נוכיח כי $R_n(x)$ שואפת במידה שווה ל-0.

ג) נניח בשלילה ש-$(R_n(x))$ אינה מתכנסת במ"ש ל-0. אזי קיים $\varepsilon>0$, וקיימת סדרת נקודות x_{n_k} בקטע $[a,b]$ כך שלכל k $R_{n_k}(x_{n_k})\ge\varepsilon$. יהי $m\in\mathbb{N}$ קבוע. לכל n_k מתקיים $R_m(x)\ge R_{n_k}(x)$ לכל $x\in[a,b]$. בפרט, עבור $x=x_{n_k}$ נקבל: $R_m(x_{n_k})\ge R_{n_k}(x_{n_k})\ge\varepsilon$.

ד) הסדרה $\{x_{n_k}\}$ חסומה בקטע $[a,b]$, ולפי משפט בולצאנו ויירשטראס קיימת לה תת סדרה מתכנסת $(x_{n_{k_l}})$ לנקודה $x_0\in[a,b]$. היות והפונקציה $R_m(x)$ רציפה ו- $R_m(x_{n_{k_l}})\geq\varepsilon$, ניתן להשאיף את הסדרה $x_{n_{k_l}}$ ל- x_0 ולקבל כי $R_m(x_0)\geq\varepsilon$.

ה) אי-שוויון ד' נכון לכל m טבעי, שנבחר שרירותית ב-ג'. אך $\lim\limits_{m\to\infty} R_m(x_0)=0$ לפי המסקנה מסעיף ב' - בסתירה להנחה! מכאן ש- $R_m(x)$ שואף ל-0 במידה שווה ב $[a,b]$, ומכאן ש- $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ מתכנס במ"ש בקטע. מש"ל.

---

8) תהי $f(x,y): A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(a,b)\in A^{\circ}$. נניח כי קיימת סביבה V . (a,b) בה קיימות הנגזרות מסדר שני f_{xy}, f_{yx} והן רציפות בנקודה (a,b). הוכח כי $f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$.

א)
$$w(\Delta x,\Delta y)=\frac{f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b+\Delta y)-f(a+\Delta x,b)+f(a,b)}{\Delta x\cdot\Delta y}$$

כמו כן נגדיר פונקציה נוספת:
$$\varphi(x)=\frac{f(x,b+\Delta y)-f(x,b)}{\Delta y}$$

הפונקציה $\varphi(x)$ מוגדרת לכל Δy שונה מ-0, בקטע $[a,a+\Delta x]$ וגזירה שם. נגזרתה היא:
$$\varphi'(x)=\frac{f'_x(x,b+\Delta y)-f'_x(x,b)}{\Delta y}$$

השוויון הבא מתאר את הקשר בין w לבין φ:
$$w(\Delta x,\Delta y)=\frac{\varphi(a+\Delta x)-\varphi(a)}{\Delta x}$$

ב) $\varphi(x)$ גזירה בקטע $[a,a+\Delta x]$, ולפי משפט לגרנג' קיים $0<\theta_1<1$ כך ש- $\varphi(a+\Delta x)-\varphi(a)=\varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x$, ומכאן:
$$w(\Delta x,\Delta y)=\frac{f'_x(a+\theta_1\Delta x,b+\Delta y)-f'_x(a+\theta_1\Delta x,b)}{\Delta y}$$

ג) נבנה כעת פונקציה נוספת:
$$\psi(y)=f'_x(a+\theta_1\Delta x,y)$$

המוגדרת וגזירה בקטע $[b,b+\Delta y]$. לפי משפט לגרנג' קיים $0<\theta_2<1$ כך ש:
$$\psi(b+\Delta y)-\psi(b)=\psi'_y(b+\theta_2\Delta y)\Delta y$$
$$w(\Delta x,\Delta y)=\frac{\psi(b+\Delta y)-\psi(b)}{\Delta y}=\psi'_y(b+\theta_2\Delta y)=f''_{xy}(a+\theta_1\Delta x,b+\theta_2\Delta y)$$

ד) לפי ההנחה הנגזרות המעורבות f''_{xy}, f''_{yx} רציפות בנקודה (a,b), ולכן אם נשאיף את $\Delta x,\Delta y$ ל-0 נקבל בגבול: $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} w(\Delta x,\Delta y)=f''_{xy}(a,b)$

ה) היות ו- $w(\Delta x,\Delta y)$ סימטרית ב- a ו- b ו- Δx ו- Δy, הרי ש: $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} w(\Delta x,\Delta y)=f''_{yx}(a,b)$

מש"ל

9) תהי (f_n) סדרת פונקציות המתכנסת במידה שווה ב-A, לפונקציה f.
תהי x_0 נקודת הצטברות של A, סופית או לא. נניח כי לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים
$\lim_{x\to x_0} f_n(x)=a_n$, כאשר $a_n\in\mathbb{R}$. הוכח כי הסדרה (a_n) מתכנסת, וכי לפונקציה
f יש גבול ב-x_0 ומתקיים $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{n\to\infty} a_n$.

א) נסמן $\lim_{x\to x_0} f_n(x)=a_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$. יהי $\varepsilon>0$. היות ו-f_n מתכנסת במידה שווה ל-f ב-A, קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m,n\geq N$ ו-$x\in A$ מתקיים ש-$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$. נובע כי לזוגות n,m מתקיים גם: $|a_n-a_m|=|\lim_{x\to x_0} f_n(x)-\lim_{x\to x_0} f_m(x)|\leq\varepsilon$. לכן לפי קריטריון קושי הסדרה a_n מתכנסת.

ב) יהי $a=\lim_{n\to\infty} a_n$, גבול שהוכח ב-א'. יהי $\varepsilon>0$, ולפיכך קיים $N_0\in\mathbb{N}$ וסביבה V של x_0, כך שלכל $x\in A$ מתקיים $|f_{N_0}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$, מהתכנסות $f_n(x)$.

ג) בהתאם, לכל $x\in A\cap V$ מתקיים $|f_{N_0}(x)-a_{N_0}|<\frac{\varepsilon}{3}$, כמו גם $|a_{N_0}-a|<\frac{\varepsilon}{3}$.

ד) נובע כי לכל $x\in A\cap V$ מתקיים: $|f(x)-a|\leq|f(x)-f_{N_0}(x)|+|f_{N_0}(x)-a_{N_0}|+|a_{N_0}-a|=\varepsilon$.

ה) לפי הגדרת הגבול, מתקיים כי: $\lim_{x\to x_0} f(x)=a=\lim_{n\to\infty} a_n$. מש"ל

---

10) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה. הוכח ש-f אינטגרבילית ב-$[a,b]$, אם
לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה d של $[a,b]$ עבורה $S(f,d)-s(f,d)<\varepsilon$.
(הערה: הוכחה של תנאי מספיק לאינטגרביליות, המשך למשפט במספר 6)

א) נניח כי לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה d של $[a,b]$ כך ש-$S(f,d)-s(f,d)<\varepsilon$.
מההגדרה של האינטגרל העליון שנסמנו $\bar{I}$ והאינטגרל התחתון שנסמנו $\underline{I}$
מתקיים כי $s(f,d)\leq\underline{I}\leq\bar{I}\leq S(f,d)$, ...

ב) לפי הנתון בא' ניתן להסיק את נכונות אי-השוויון הבא: $|\bar{I}-\underline{I}|<|S(f,d)-s(f,d)|<\varepsilon$,
וזאת לכל ε. מכאן ש-$\bar{I}=\underline{I}$.

ג) לפי משפט דרבו, לכל בחירה של נקודות $c_i\in\Delta x_i$ בחלוקה d יתקיים כי:

$$s(f,d)\leq\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\leq S(f,d)$$

ומסעיף ב' מתקבל כי

$$\lim_{\lambda d\to 0} s(f,d)\leq\lim_{\lambda d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\leq\lim_{\lambda d\to 0} S(f,d)$$

$$\circledast\quad \lim_{\lambda d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i=\bar{I}=\underline{I}$$

ד) ידוע כי f חסומה, ומ-$\circledast$ ידוע כי $|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - I|<\varepsilon$ לכל c_i שנבחר. מכאן
f אינטגרבילית. מש"ל